

Пространственно локализованные решения уравнения Гросса–Питаевского с периодически модулированной нелинейностью

Лебедев Михаил Евгеньевич

Институт математики с вычислительным центром
УФИЦ РАН

gloriouslair@gmail.com

Москва – 2020

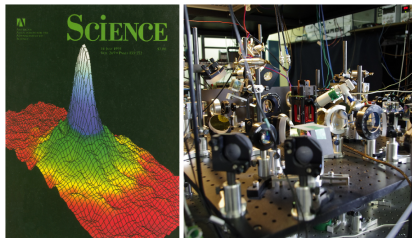
Актуальность работы

Одномерное уравнение Гросса–Питаевского (УГП):

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} - U(x)\Psi + P(x)|\Psi|^2\Psi = 0, \quad U(x), P(x) \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

В контексте теории конденсата Бозе–Эйнштейна (БЭК) описывает поведение “сигарообразного” конденсата; $\Psi(t, x)$ — *волновая функция*.

- БЭК — это состояние вещества, возникающее при сверхнизких температурах.
- Предсказан в 1924 году в работах А. Эйнштейна и С. Бозе.
- Обнаружен в 1995 году в экспериментах Э. Корнелла, К. Вимана.
- 1995–2000-е: эксперименты с различными *потенциалами удержания* $U(x)$, при этом $P(x) \equiv \pm 1$ (притяжение / отталкивание частиц).
- 2000–2010-е: появляются экспериментальные возможности генерации *периодического псевдопотенциала* $P(x)$.



Стационарные локализованные решения

Решение уравнения (1) называется *стационарным*, если оно представимо в виде

$$\Psi(t, x) = u(x)e^{-i\omega t}. \quad (2)$$

Стационарное УГП имеет вид неавтономного уравнения Дюффинга:

$$u_{xx} + Q(x)u + P(x)u^3 = 0, \quad Q(x) = \omega - U(x). \quad (3)$$

Стационарное решение называется *локализованным*, если $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = 0$.

Регулярные и сингулярные решения

Решение уравнения (3) называется *сингулярным*, если $\exists x_0, \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \infty$.

Решение, не являющееся сингулярным, называется *регулярным*.

Известные результаты

1. Y. V. Kartashov, B. A. Malomed, L. Torner, Solitons in nonlinear lattices // Rev. Mod. Phys. **83**, 247 (2011).
 - Исчерпывающий обзор физических моделей, в которых возникает переменный псевдопотенциал $P(x)$.
2. H. Sakaguchi, B. A. Malomed // Phys. Rev. E **72**, 046610 (2005).
 - Рассмотрена модель $U(x) \equiv 0$, $P(x) = a - \cos 2x$.
 - Исследована устойчивость фундаментального решения методом вариационной аппроксимации.
3. Bludov, Y. V., and V. V. Konotop // Phys. Rev. A **74**, 043616 (2006).
 - Рассмотрен БЭК смеси бозонов и фермионов; $U(x)$, $P(x)$ – периодические функции.
 - Произведен численный анализ простейших решений задачи.
4. G. L. Alfimov, D. A. Zezyulin // Nonlinearity, **20**, 2075 (2007).
 - Исследовано множество стационарных локализованных решений и их устойчивость для $U(x) = x^2$, $P(x) = \pm 1$.
 - Показано, что каждое решение имеет аналог среди решений уравнения для линейного гармонического осциллятора.

- 1 Описать максимально подробно множество регулярных стационарных локализованных решений УГП для периодического псевдопотенциала $P(x)$ в случае, когда *потенциал удержания отсутствует*, $U(x) \equiv 0$.
 - Когда существуют регулярные локализованные решения?
 - Сколько вообще существует таких решений?
 - Сколько существует решений, локализованных на одном периоде $P(x)$?
 - Какие решения устойчивы?
- 2 Выяснить влияние периодического псевдопотенциала $P(x)$ на структуру семейства стационарных локализованных решений УГП и их устойчивость для случая *параболической потенциальной ямы* $U(x) = x^2$.
 - Есть ли связь с хорошо изученным случаем $P(x) \equiv \pm 1$?
 - Какие решения устойчивы?

1. Математические результаты
о регулярных и сингулярных решениях
уравнения $u_{xx} + Q(x)u + P(x)u^3 = 0$

Общие утверждения о регулярности решений

$$u_{xx} + Q(x)u + P(x)u^3 = 0. \quad (4)$$

Предложение 1

Пусть $\forall x \in \mathbb{R}$, функции $Q(x), P(x) \in C^1(\mathbb{R})$, причем

(а) $P(x) \geq P_0 > 0, |P'(x)| \leq \tilde{P}$;

(б) $Q(x) \geq Q_0, |Q'(x)| \leq \tilde{Q}$;

тогда решение задачи Коши для уравнения (4) с произвольными начальными условиями (u_0, u'_0) **регулярно** и может быть продолжено на всю действительную ось $\mathbb{R}$.

Предложение 2

Пусть $\forall x \in \mathbb{R}$ выполняются условия: $P(x) \leq P_0 < 0, Q(x) \leq Q_0 < 0$, тогда все решения уравнения (4) **сингулярны**, за исключением нулевого решения.

Семейства сингулярных решений

Предложение 3

Пусть $\exists x_0$, $P(x_0) < 0$, Ω — некоторая окрестность точки x_0 , причём $Q(x) \in C^2(\Omega)$ и $P(x) \in C^4(\Omega)$, тогда существуют два C^1 — гладких однопараметрических семейства решений уравнения (4), **сингулярных** в точке x_0 , связанных между собой симметрией $u \rightarrow -u$ и имеющих разложения:

$$\pm u(x) = \frac{\sqrt{2}}{\eta} + A_0 + A_1\eta + A_2\eta^2 + A_3\eta^3 \ln |\eta| + C\eta^3 + A_4\eta^4 \ln |\eta| + \dots, \quad (5)$$

где $\eta = x - x_0$. Каждое из этих семейств можно запараметризовать свободной переменной $C \in \mathbb{R}$.

$$A_0 = \frac{\sqrt{2}}{3}P_1, \quad A_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}P_2 + \frac{\sqrt{2}}{6}Q_0 + \frac{2\sqrt{2}}{9}P_1^2;$$

$$A_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}P_2P_1 + \frac{7\sqrt{2}}{27}P_1^3 + \frac{\sqrt{2}}{6}Q_0P_1 + \frac{\sqrt{2}}{4}Q_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}P_3 \dots$$

Таблица результатов

$P(x)$	$Q(x)$	
$P(x) > 0$	—	Все решения продолжаются на действительную ось, сингулярные решения отсутствуют.
$P(x) < 0$ хотя бы в одной точке $x = x_0$	—	Имеется пара однопараметрических семейств решений, коллапсирующих в точке $x = x_0$ и связанных симметрией $u \rightarrow -u$.
$P(x) < 0$	$Q(x) < 0$	Все решения сингулярны за исключением нулевого решения.
$P(x)$ знакопеременна	—	Сингулярность решений является типичным поведением. Это позволяет при некоторых дополнительных ограничениях применить метод исключения сингулярных решений и классифицировать оставшиеся регулярные решения в терминах символической динамики.

2. Классификация стационарных
локализованных решений УГП в случае
отсутствия внешнего потенциала,

$$U(x) \equiv 0, \quad P(x) \neq 0$$

- $U(x) \equiv 0$, потенциал удержания отсутствует;
- $P(x + L) = P(x)$, периодический псевдопотенциал;
- $P(x) \neq 0$, сингулярность — типичное поведение решений;
- $\omega < 0$, наличие локализованных решений.

$$u_{xx} + \omega u + P(x)u^3 = 0. \quad (6)$$

Если «большая часть» решений уходит на бесконечность, тогда множество регулярных решений может быть описано в терминах символической динамики³.

³G. L. Alfimov, A. I. Avramenko // Physica D 254, 29 (2013)

Классификация

Аппарат

Множества $\mathcal{U}_L^\pm$

$\mathcal{U}_L^\pm = \{(u_0, u'_0) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{решение задачи Коши для уравнения (6) с НУ } (u_0, u'_0) \text{ не сингулярно на } [0, \pm L]\}$, $\mathcal{U}_L = \mathcal{U}_L^+ \cap \mathcal{U}_L^-$.

Отображение Пуанкаре $\mathcal{P} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$\mathcal{P}(u_0, u'_0) = (u(L), u'(L))$, где $u(x)$ — решение с НУ (u_0, u'_0) .

Орбита

Последовательность точек $\{p_n\}$ таких, что $\mathcal{P}(p_n) = p_{n+1}$.

$\Sigma : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{S}$

Можно определить соответствие (Σ) между *орбитами* регулярных решений ($\mathcal{O}$) и *последовательностями* ($\mathcal{S}$) над некоторым алфавитом, где каждый символ соответствует компоненте связности множества $\mathcal{U}_L$.

Классификация

Пример множеств $\mathcal{U}_L^\pm$

$$P(x) = \alpha + \cos 2x, \quad \alpha \in (-1; +1)$$

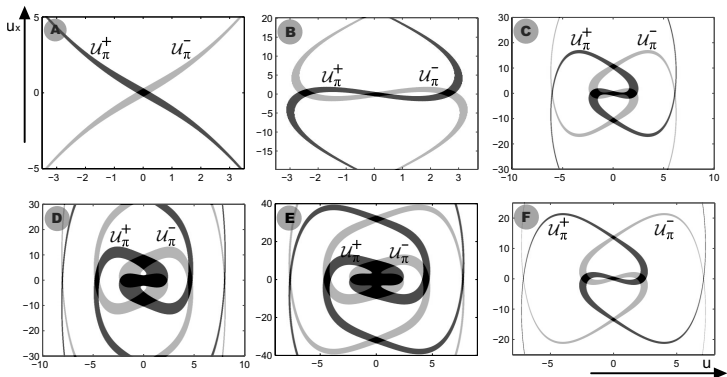


Рис. 1: Множества $\mathcal{U}_\pi = \mathcal{U}_\pi^+ \cap \mathcal{U}_\pi^-$ для различных значений ω, α .

Классификация

Построение алфавита: $\omega = -1$, $\alpha = -0.1$

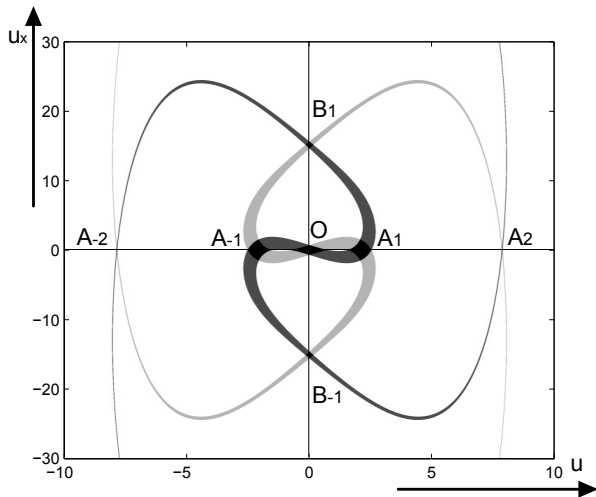


Рис. 2: Спиралевидная структура $\mathcal{U}_\pi^\pm \Rightarrow$ бесконечный алфавит.

Классификация

Кодировка решений

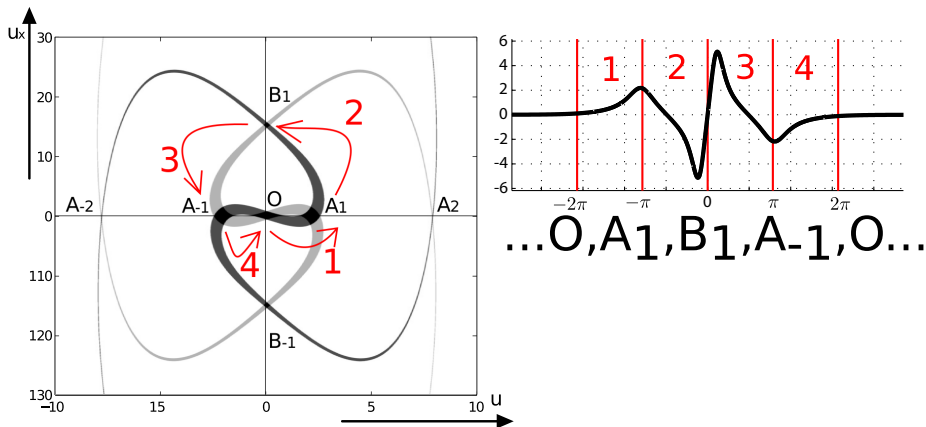


Рис. 3: Пример построение кода для заданного решения.

Классификация

Взаимно однозначное соответствие

Когда соответствие Σ является взаимно однозначным?³

- 1 Множество $\mathcal{U}_L$ состоит из непересекающихся *островов*: $\mathcal{U}_L = \bigcup_{i \in S} D_i$.
- 2 $\mathcal{P}D_i \cap D_j$, $\mathcal{P}^{-1}D_i \cap D_j$ непусты; действие $\mathcal{P}$ на кривые внутри D_i сохраняет свойства монотонности.
- 3 $\Delta_0 = \mathcal{U}_L$, $\Delta_{n+1}^+ = \mathcal{P}\Delta_n^+ \cap \Delta_0$, $\Delta_{n+1}^- = \mathcal{P}^{-1}\Delta_n^- \cap \Delta_0$,
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\Delta_n^\pm) = 0.$$

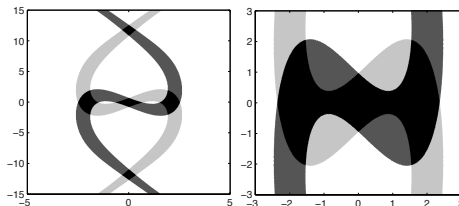


Рис. 4: Пример островного и не островного множества $\mathcal{U}_L$.

³G. L. Alfimov, A. I. Avramenko, Physica D 254, 29 (2013)

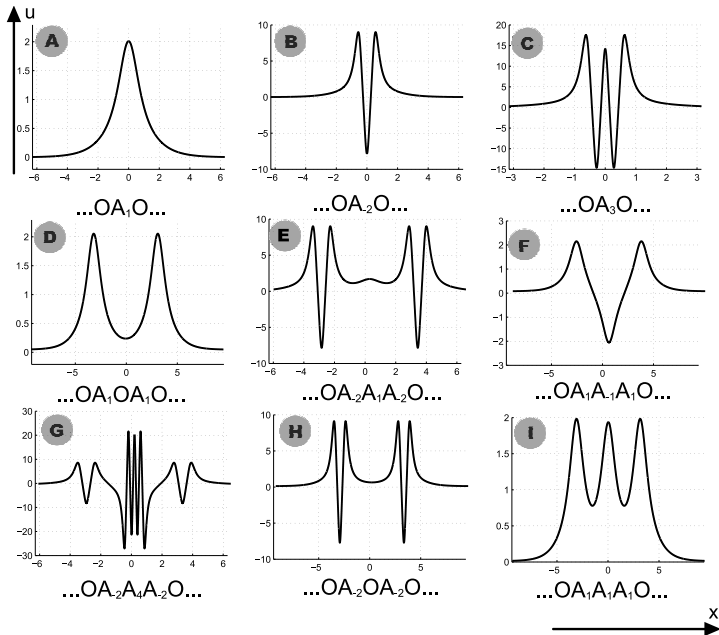


Рис. 5: Решения и их коды при $\omega = -1$, $\alpha = -0.1$.

Исходное уравнение:

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} + F(|\Psi|^2, x)\Psi = 0. \quad (7)$$

Малые возмущения стационарного решения:

$$\Psi(t, x) = (u(x) + \tilde{R}(t, x))e^{-i\omega t}, \quad \tilde{R} \ll 1. \quad (8)$$

Ищем решение в виде:

$$\tilde{R}(t, x) = (a(x) + b(x))e^{\lambda t} + (a^*(x) - b^*(x))e^{\lambda^* t}. \quad (9)$$

Задача на собственные значения:

$$i \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{L}_0 \\ \mathcal{L}_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}; \quad (10)$$

$$\mathcal{L}_0 = \partial_{xx} + \omega + F(u^2, x); \quad (11)$$

$$\mathcal{L}_1 = \partial_{xx} + \omega + F(u^2, x) + 2u^2 F_{|\Psi|^2}(u^2, x). \quad (12)$$

⁴Jianke Yang, Nonlinear Waves in Integrable and Nonintegrable Systems // Society of Industrial and Applied Mathematics (2010)

УСТОЙЧИВОСТЬ

Метод коллокаций Фурье

Рассматриваем локализованное решение на отрезке: $[-\frac{M}{2}; \frac{M}{2}]$.
Ищем решение задачи (10) в виде разложений в ряды Фурье:

$$a(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i \frac{2\pi n}{M} x}, \quad b(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n e^{i \frac{2\pi n}{M} x}. \quad (13)$$

Соответствующие представления для операторов $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1$:

$$\mathcal{L}_0 = \partial_{xx} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^{(0)} e^{i \frac{2\pi n}{M} x}, \quad \mathcal{L}_1 = \partial_{xx} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^{(1)} e^{i \frac{2\pi n}{M} x}. \quad (14)$$

Подставляя (13), (14) в (10), получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} -i\lambda a_k = -b_k(kk_0)^2 + \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^{(0)} b_{k-n} \\ -i\lambda b_k = i a_k(kk_0)^2 + i \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^{(1)} a_{k-n} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (15)$$

Ограничим количество гармоник Фурье: $k \in [-K; K] \Rightarrow$ задача на собственные значения оператора конечной размерности.

Устойчивость

Тест

- (A) Решение $|\Psi(t, x)|$ *линейно устойчиво*: весь спектр $\{\lambda_i\}$ является мнимым.
- (B) Решение $|\Psi(t, x)|$ *экспоненциально неустойчиво*: $\exists$ пара действительных собственных значений $\pm\lambda$.
- (C) Решение $|\Psi(t, x)|$ *осцилляторно неустойчиво*: $\exists$ четверка комплексных собственных значений $\pm\lambda, \pm\lambda^*$.

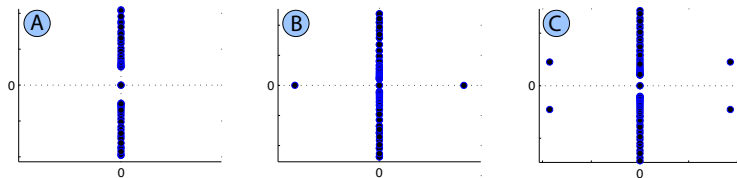


Рис. 6: Примеры спектров для различных типов устойчивости.

Далее представлены результаты для:

$$F(|\Psi|^2, x) = (\alpha + \cos 2x)|\Psi|^2.$$

Устойчивость

Примеры: фундаментальное решение

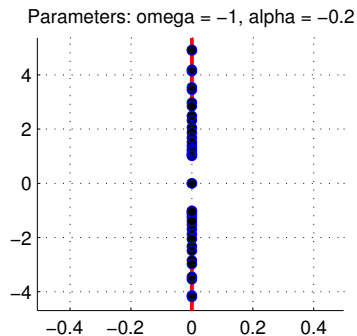
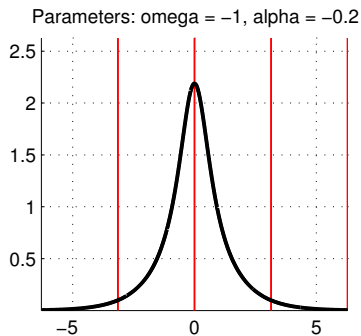


Рис. 7: Фундаментальное решение $\dots OA_1O \dots$, *линейно устойчиво*.

Устойчивость

Примеры: дипольное решение

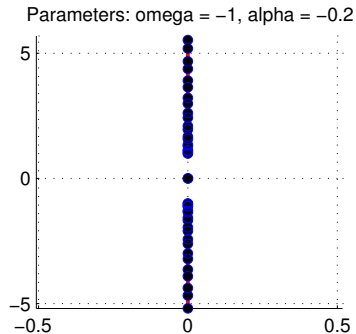
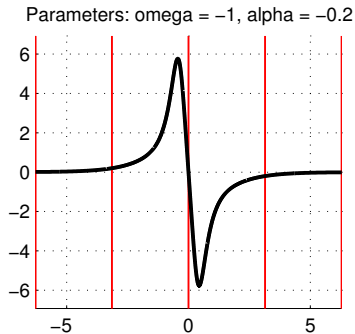


Рис. 8: Дипольное решение $\dots OB_{-1}O \dots$, *линейно устойчиво*.

Устойчивость

Примеры

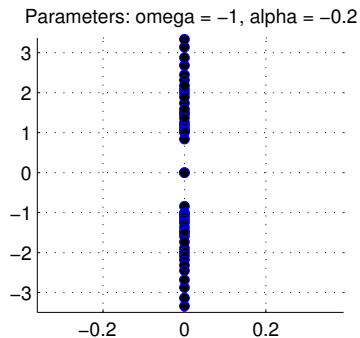
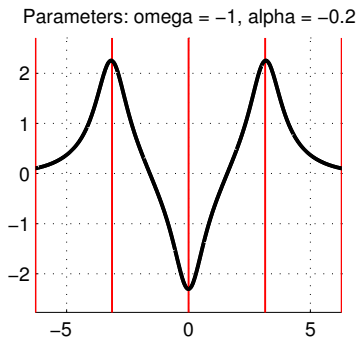


Рис. 9: Решение $\dots OA_1 A_{-1} A_1 O \dots$, *линейно устойчиво*.

Устойчивость

Примеры

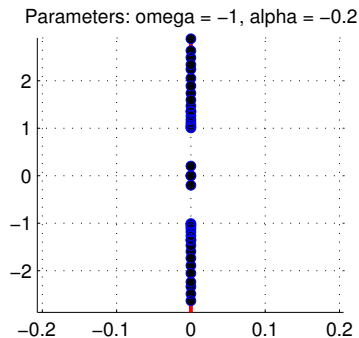
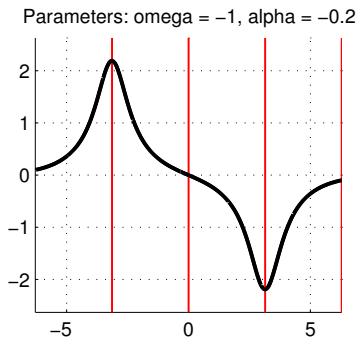


Рис. 10: Решение $\dots OA_1OA_{-1}O\dots$, *линейно устойчиво*.

Устойчивость

Примеры

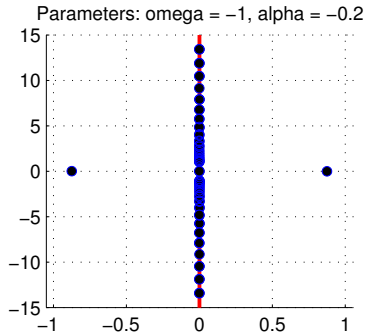
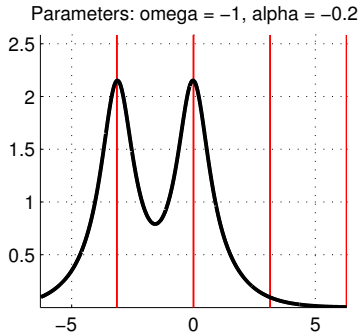


Рис. 11: Решение $\dots OA_1 A_1 O \dots$, *экспоненциально неустойчиво*.

Устойчивость

Примеры

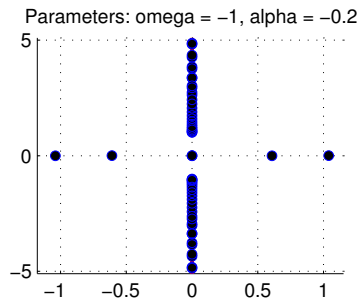
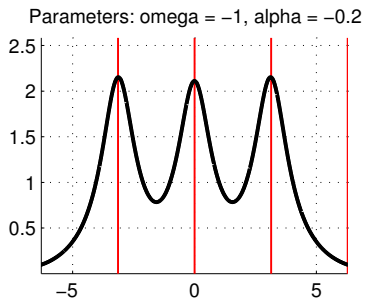


Рис. 12: Решение: $\dots OA_1 A_1 A_1 O \dots$, *экспоненциально неустойчиво*.

Устойчивость

Примеры

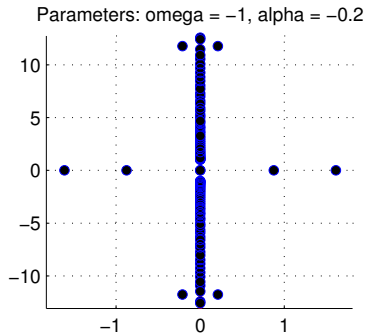
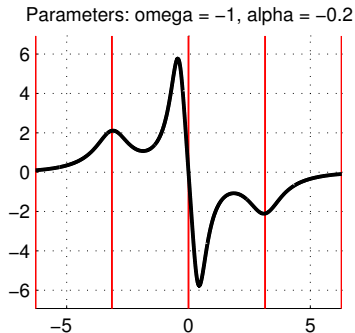


Рис. 13: Решение: $\dots OA_1 B_{-1} A_{-1} O \dots$, *экспоненциально неустойчиво*.

Устойчивость

Примеры

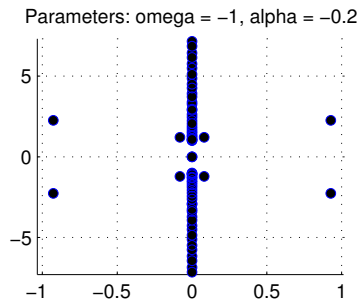
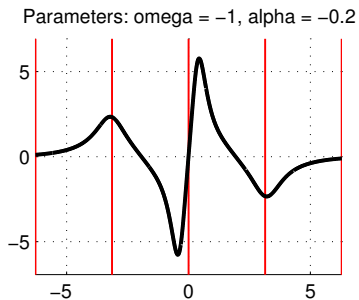


Рис. 14: Решение: $\dots OA_1 B_1 A_{-1} O \dots$, *осцилляторно неустойчиво*.

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} + (\alpha + \cos 2x)|\Psi|^2\Psi = 0 \quad (16)$$

- Множество стационарных решений уравнения (16) чрезвычайно богато.
- Большинство стационарных решений оказываются неустойчивы; исключение составляют:
 1. Фундаментальное решение: $\dots OA_{\pm 1}O\dots$
 2. Дипольное решение: $\dots OB_{\pm 1}O\dots$ (**new**).
 3. Некоторые комбинации (1) и (2): $\dots OA_1A_{-1}A_1O\dots$,
 $\dots OA_1OA_{-1}O\dots$

Для расчёта используем консервативную разностную схему Сухорукова⁶. Она сохраняет два интеграла:

$$N(t) = \int |\Psi(t, x)|^2 dx; \quad E(t) = \frac{1}{2} \int \Psi^*(t, x) \hat{H} \Psi(t, x) dx \quad (17)$$

Для подавления эффекта отражения излучения от краев области интегрирования при расчете, в схему добавлен *поглощающий слой*.

⁶V. A. Trofimov, N. V. Peskov // Mathematical Modelling and Analysis, Volume 14 Number 1, 2009, pages 109-126

Устойчивость

Расчёт эволюции: дипольное решение

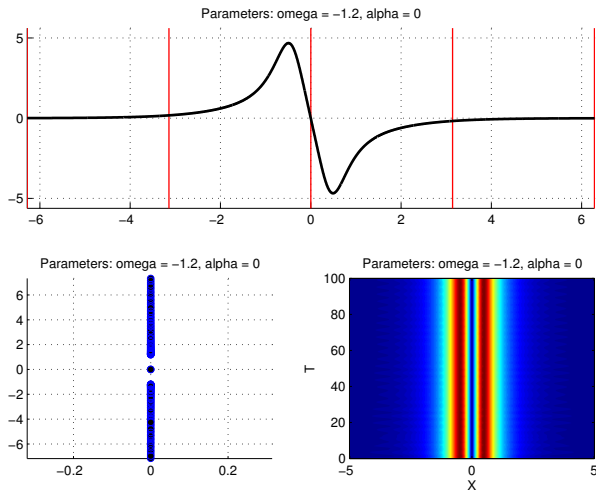


Рис. 15: Устойчивое дипольное решение.

Устойчивость

Расчёт эволюции: дипольное решение

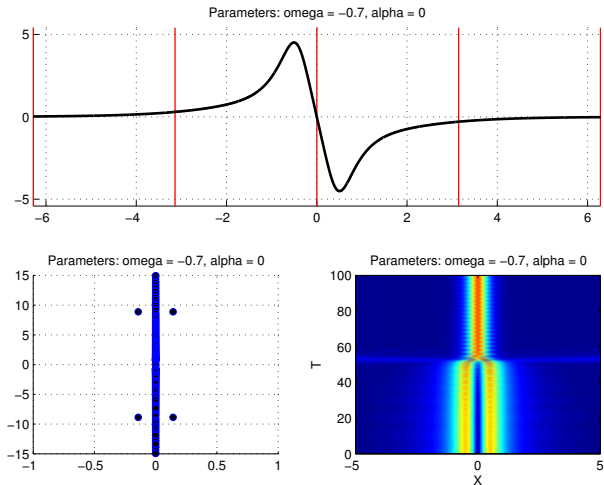


Рис. 16: Неустойчивое дипольное решение.

3. Стационарные локализованные решения
УГП в случае параболической потенциальной
ямы и периодического псевдопотенциала,

$$U(x) = x^2, \quad P(x) \neq 0$$

Параболическая потенциальная яма

Простейший псевдопотенциал⁷

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} - x^2\Psi \pm |\Psi|^2\Psi = 0. \quad (18)$$

Все локализованные решения имеют линейный аналог.

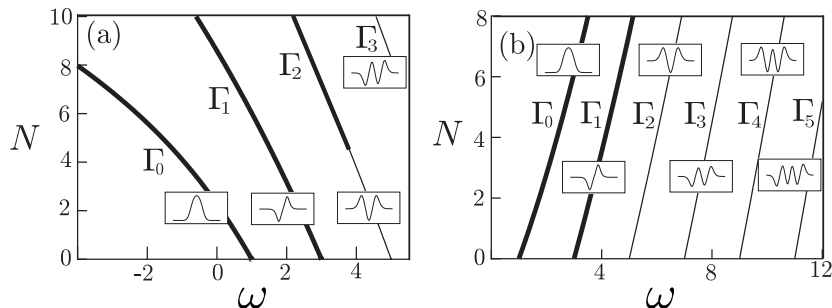


Рис. 17: Ветви различных локализованных решений и их устойчивость для случаев (a) $P(x) \equiv +1$; (b) $P(x) \equiv -1$.

⁷D. A. Zezyulin, G. L. Alfimov, V. V. Konotop and V. M. Pérez-García // Phys. Rev. A **76**, 013621 (2007)

Параболическая потенциальная яма

Периодический псевдопотенциал с ненулевым средним

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} - x^2\Psi + (1 + \beta \cos \Omega x)|\Psi|^2\Psi = 0. \quad (19)$$

Появляются решения, не имеющие линейного аналога.

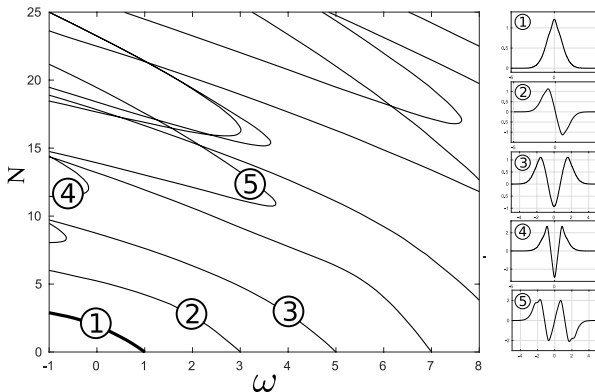


Рис. 18: Ветви различных локализованных решений и их устойчивость для $\beta = 2$, $\Omega = 8$.

Параболическая потенциальная яма

Периодический псевдопотенциал с нулевым средним

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} - x^2\Psi + \cos \Omega x |\Psi|^2\Psi = 0. \quad (20)$$

Ветвь решения (1) устойчива при $\omega \approx 5$.

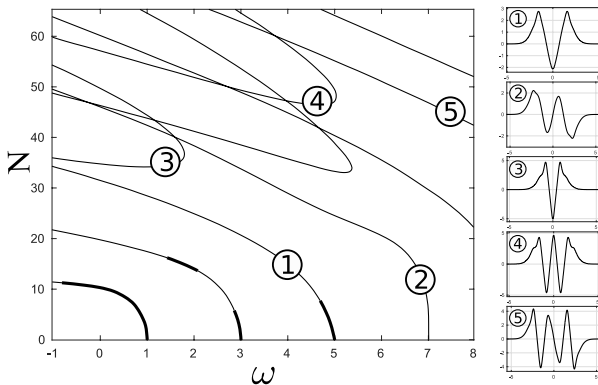


Рис. 19: Ветви различных локализованных решений и их устойчивость для $\Omega = 8$.

Предельный переход $\Omega \rightarrow +\infty$

Периодический псевдопотенциал с ненулевым средним

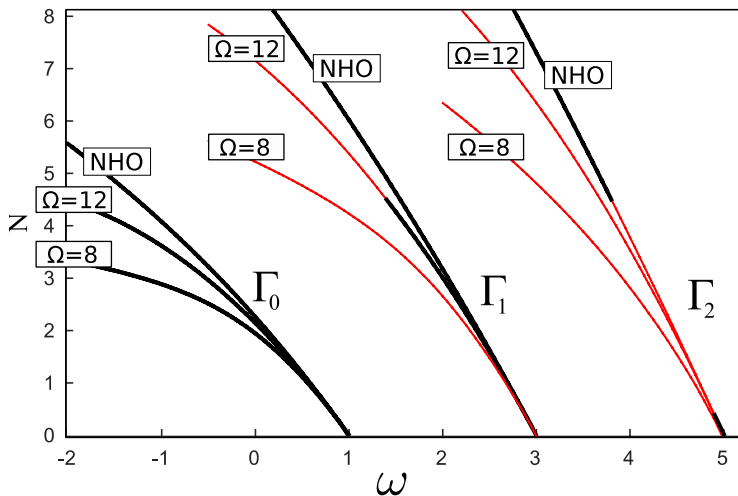


Рис. 20: Переход к нелинейному гармоническому осциллятору при $\Omega \rightarrow +\infty$ для $P(x) = 1 + \cos \Omega x$.

Предельный переход $\Omega \rightarrow +\infty$

Периодический псевдопотенциал с нулевым средним

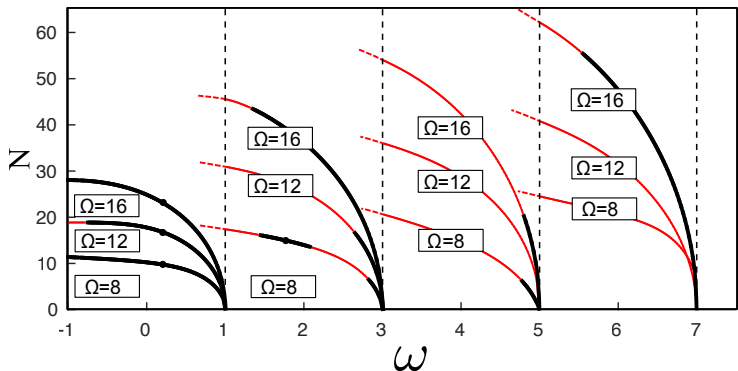


Рис. 21: Переход к линейному гармоническому осциллятору при $\Omega \rightarrow +\infty$ для $P(x) = \cos \Omega x$.

Потеря устойчивости решений с линейным аналогом

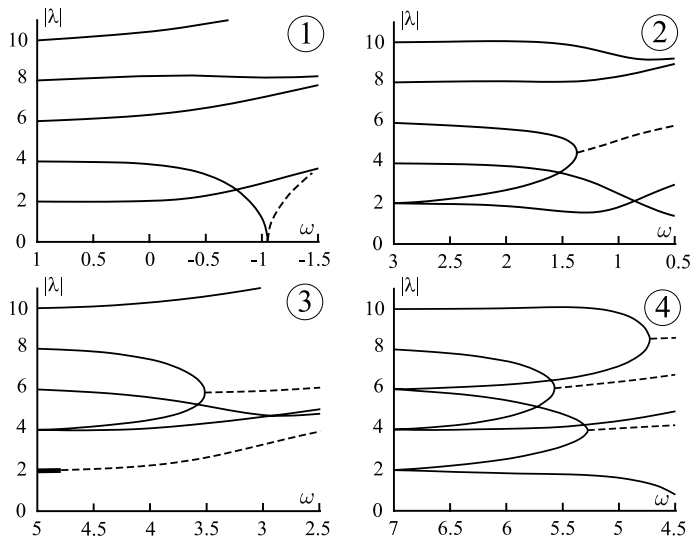


Рис. 22: Сценарии потери устойчивости первых четырёх ветвей решений с линейным аналогом для $P(x) = \cos 16x$.

Классическая потенциальная яма

Расчёт эволюции

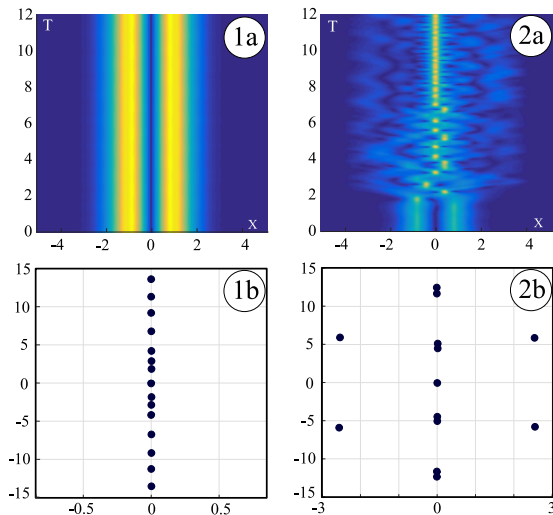


Рис. 23: Решение Γ_1 при $P(x) = \cos 16x$ для (1) $\omega = 2$ и (2) $\omega = 0$.

- Присутствие периодического псевдопотенциала приводит к появлению локализованных решений без линейного аналога.
- В предельном случае $\Omega \rightarrow +\infty$ задача приближается к линейному или нелинейному гармоническому осциллятору.
- Сценарий потери устойчивости для решений с линейным аналогом (*исследован асимптотически и численно*):
 - 1 При $P(x) = 0$ некоторые λ_i удвоены.
 - 2 Удвоенные λ_i расщепляются под действием возмущения $P(x) \neq 0$.
 - 3 При расщеплении могут образовывать λ_i с ненулевой действительной частью.

Основные результаты и положения

выносимые на защиту

1. Сформулированы достаточные условия, гарантирующие (а) наличие и (б) отсутствие сингулярных решений стационарного УГП. Доказаны утверждения о существовании семейств сингулярных решений, соответствующих случаю “общего положения”.
2. Предложен метод описания стационарных локализованных решений УГП с нулевым потенциалом и периодическим псевдопотенциалом в терминах символической динамики. Использование этого метода позволило обнаружить новое устойчивое решение УГП, т.н. дипольное локализованное решение, а также ряд устойчивых связанных состояний.
3. Показано, что наличие периодического псевдопотенциала высокой частоты позволяет стабилизировать неустойчивые нелинейные локализованные решения, существующие в модели УГП с квадратичным потенциалом.

11 публикаций, 3 статьи, индексируемые системой Scopus.

1. Алфимов Г. Л., Лебедев М. Е., О регулярных и сингулярных решениях уравнения $u_{xx} + Q(x)u + P(x)u^3 = 0$ // Уфимск. матем. журн. том **7**, выпуск 2, стр. 3–18 (2015).
2. Lebedev M. E., Alfimov G. L., Malomed B. A., Stable dipole solitons and soliton complexes in the nonlinear Schrödinger equation with periodically modulated nonlinearity // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science **26** (7), 073110 (2016)
3. Alfimov G. L., Gegel L. A., Lebedev M. E., Malomed B. A., Zezyulin D. A., Localized modes in the Gross-Pitaevskii equation with a parabolic trapping potential and a nonlinear lattice pseudopotential // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation **66**, 194-207 (2019).
5. Alfimov G. L., Lebedev M. E., Coding of stationary modes for the nonlinear Schrödinger equation with periodically modulated nonlinearity // Мат. конф. “Hamiltonian Dynamics, Nonautonomous Systems, and Patterns in PDE’s”, НГУ, Нижний Новгород, декабрь 2014.
6. Алфимов Г. Л., Лебедев М. Е., Стационарные моды нелинейного уравнения Шрёдингера в присутствии линейного и нелинейного потенциалов // Мат. конф. “Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании”, БашГУ, Уфа, сентябрь 2015.

7. Lebedev M. E., Alfimov G. L., Malomed B. A., Stable dipole solitons and soliton complexes in the nonlinear Schrödinger equation with periodically modulated nonlinearity // Мат. конф. "Hamiltonian Dynamics, Nonautonomous Systems, and Patterns in PDE's", НГУ, Нижний Новгород, декабрь 2016.
8. Alfimov G. L., Gegel L. A., Lebedev M. E., Zezyulin D. A., Malomed B. A., Steady-states for the Gross-Pitaevskii equation with nonlinear lattice pseudopotential // Мат. конф. "Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения", озеро Банное, Башкортостан, март 2018.
9. Alfimov G. L., Lebedev M. E., Zezyulin D. A., Malomed B. A., Steady-states for the Gross-Pitaevskii equation with nonlinear lattice pseudopotential // Конф. "Nonlinear Phenomena in Bose Condensates and Optical Systems", Ташкент, Узбекистан, август 2018.
10. Zezyulin D. A., Lebedev M. E., Alfimov G. L., Malomed B. A., Symmetry breaking in competing single-well linear-nonlinear potentials // Мат. конф. "Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения", озеро Банное, Башкортостан, март 2018.
11. Lebedev M. E., Shipitsyn K. V., Codding of solutions for the Duffing equation with non-homogeneous nonlinearity // Мат. конф. "Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения", озеро Банное, Башкортостан, март 2018.

Спасибо за внимание!