ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ ЛАУРИЧЕЛЛЫ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ

С.И.Безродных

ФИЦ ИУ РАН, Москва

Доклад посвящен развитию теории функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$, являющейся гипергеометрической функцией многих комплексных переменных $(z_1, \ldots, z_N) =: \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$. Изначально она определяется в единичном поликруге в виде следующего N–кратного ряда:

$$F_D^{(N)}\,(\mathbf{a}; b, c;\, \mathbf{z}) \;:=\; \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(b)_{|\mathbf{k}|}(a_1)_{k_1}\cdots(a_N)_{k_N}}{(c)_{|\mathbf{k}|}k_1!\cdots k_N!}\, z_1^{k_1}\cdots z_N^{k_N}\,, \tag{1}$$

где $(a_1, \ldots, a_N) =: \mathbf{a}$, b, c — комплексные параметры, $\mathbf{k} := (k_1, \ldots, k_N)$ — мультииндекс, $|\mathbf{k}| = \sum_{j=1}^{N} k_j$, $(a)_k = a(a+1)\ldots(a+k-1)$ — символ Похгаммера. Функция $F_D^{(N)}$ удовлетворяет системе N линейных уравнений с частными производными по переменным z_j:

$$z_j(1-z_j)\partial^2_{jj}u + (1-z_j)\sum_{k=1}^{N}{}' z_k\partial^2_{jk}u + \Big[c-(1+a_j+b)z_j\Big]\partial_j u - a_j\sum_{k=1}^{N}{}' z_k\partial_k u - a_j b\, u = 0, \tag{2}$$

где $j=\overline{1,N}$, а "штрих" над суммой означает, что суммирование ведется по $k \neq j$.

Основной проблемой теории этой функций является вопрос об аналитическом продолжении, который заключается в том, чтобы указать для нее набор представлений вида

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c;\, \mathbf{z}) = \sum\nolimits_{j=0}^{N} \lambda_j\, u_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \qquad \mathbf{z} \notin \mathbb{U}^N, \tag{3}$$

так чтобы их области сходимости покрывали в совокупности все N–мерное комплексное пространство $\mathbb{C}^N$. В формуле (3) функции $u_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$ — обобщенные гипергеометрические ряды, удовлетворяющие той же, что и $F_D^{(N)}$, системе уравнений (2). Представления вида (3) называют формулами аналитического продолжения. В докладе найден явный вид функций u_j и коэффициентов λ_j в общем случае.

Дано приложение полученных результатов к эффективному построению конформного отображения сингулярно деформированного многоугольника в ситуации резко неравномерного распределения прообразов вершин. Подобная ситуация, называемая "кроудингом" и вызывающая большие трудности при использовании стандартных вычислительных процедур, успешно преодолена благодаря полученным формулам аналитического продолжения.